Praca domowa nr 3

Termin oddania: 16.05.2023

Uwaga - pracę domową należy przygotować w postaci sprawozdania w LaTeX'u - tutaj przykładowy raport wraz z kodem źródłowym. Papierową wersję należy przynieść bezpośrednio do mnie najpóźniej do 16.05.2023.

1. Zaprezentuj działanie **centralnego twierdzenia granicznego (CTG)** poprzez wykonanie następujących kroków:
   (a) Wybierz rozkład zmiennej losowej X inny niż jednostajny.
   (b) Korzystając z CTG wyznacz analitycznie średnią μ i wariancję σ^2 zmiennej losowej $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$.
   (c) Przeprowadź symulację $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ łącznie 10^4 razy.
   (d) Na jednym wykresie zaznacz histogram danych z powyższej symulacji, krzywą z CTG o parametrach teoretycznych oraz krzywą z CTG o parametrach empirycznych z symulacji.

2. Wyznacz metodą momentów[1] albo metodą największej wiarygodności estymatory parametrów w następujących rozkładach:
   (a) rozkład Gaussa $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ (gdzie $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$)
   (b) rozkład geometryczny $f(k) = q \cdot (1-q)^k$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (gdzie $q \in (0, 1]$)
   (c) rozkład log-normalny $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ (gdzie $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$)
   (d) rozkład Poissona $f(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (gdzie $\lambda \in \mathbb{R}_+$)
   (e) rozkład gamma $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\Gamma(x)$ to funkcja gamma)

3. Oblicz (lub uzasadnij że to nie możliwe) funkcje generującą, tworzącą i charakterystyczną dla
   (a) rozkładu Gaussa $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ (gdzie $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$)
   (b) rozkładu jednostajnego (dyskretnego) $f(k) = \frac{1}{N+1}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ (gdzie $N \in \mathbb{Z}_+$)
   (c) rozkładu Pareto $f(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} I_{[x_m,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (gdzie $\alpha, x_m \in \mathbb{R}_+$)
   (d) rozkładu Poissona $f(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (gdzie $\lambda \in \mathbb{R}_+$)
   (e) rozkładu gamma $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\Gamma(x)$ to funkcja gamma)

[1] Momenty można policzyć analitycznie albo wziąć z zewnętrznych źródeł - proszę wtedy podać koniecznie cytowanie!